

Die Schönheit der Zahlen

Johann Sebastian Bach, Le Corbusier und Maurits Escher: Die Mathematik hat viele Künstler beeinflusst. Aber auch der Mathematik selbst wohnt Schönheit inne. Unser Autor jedenfalls ist fest davon überzeugt und begeistert sich für deren Kürze, Schlichtheit, Klarheit und absolute Überzeugungskraft ihrer Argumentationen und Ideen. Ein Plädoyer für die Freude an einer Rechenkunst, die sich auch Laien erschließen kann.

TEXT **DON ZAGIER**

Ein ungarischer Zahlentheoretiker definierte Mathematiker einmal so: „Ein Mathematiker ist ein Gerät, das Kaffee in Theoreme verwandelt.“ Da es in meinem Institut in Bonn keinen guten Kaffee gibt, aber keinen Mangel an Mathematikern oder an Theoremen, habe ich mich manchmal gefragt, ob Mathematiker nicht auch in der umgekehrten Richtung eingesetzt werden könnten!

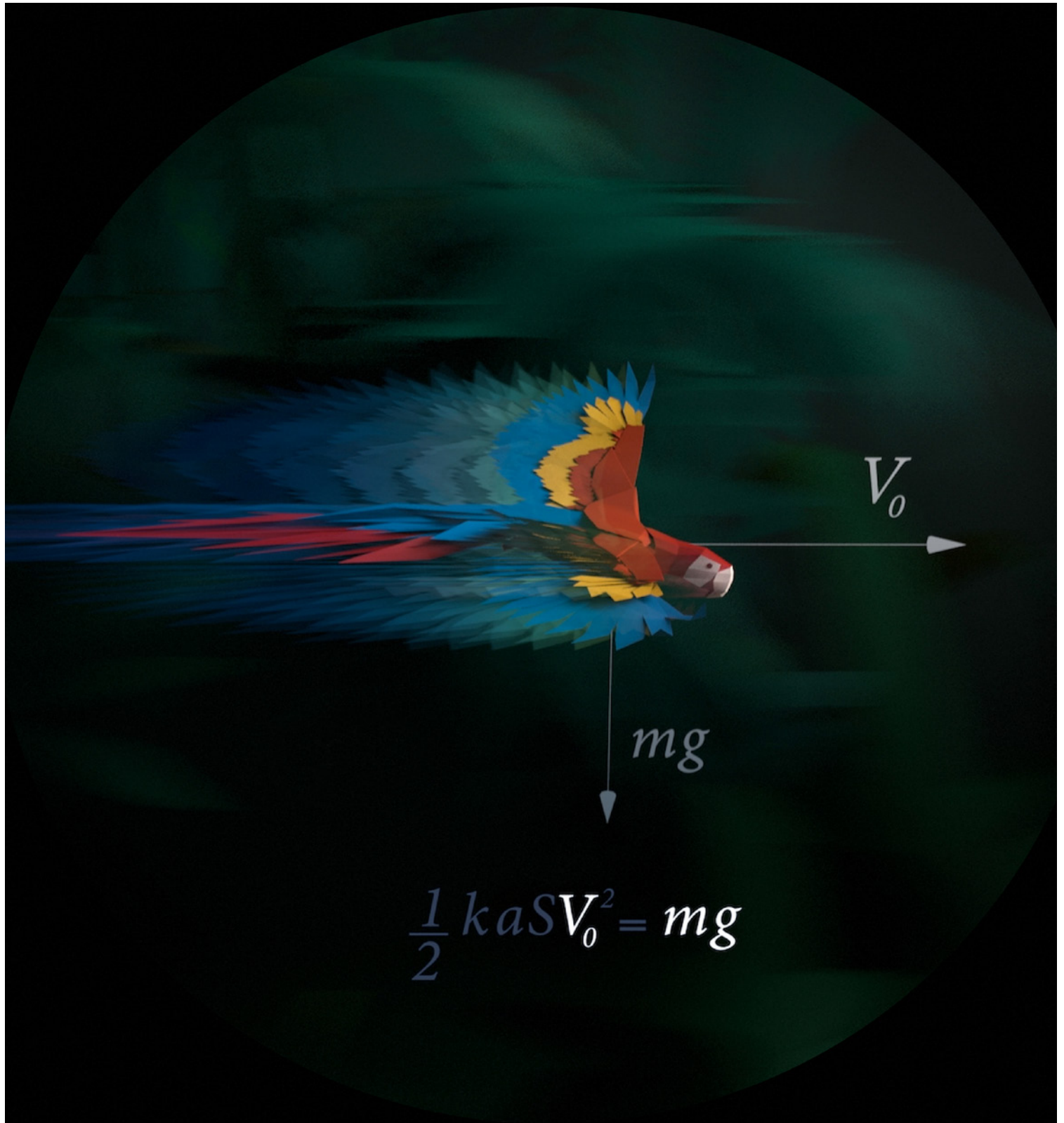
Nun gibt es Menschen, die nicht aufhören können, Kaffee in besagtem Sinne zu verarbeiten, und andere, denen der bloße Gedanke an Mathematik ein

Was macht der Mathematiker? Erfindet oder entdeckt er Neues?

Gräuel ist. Darauf will ich später zurückkommen. Zunächst aber will ich auf andere Fragen eingehen: Was ist die Mathematik? Worin besteht ihre Schönheit? Und was kann man machen, um die Freude an ihr auch Nichtmathematikern zu vermitteln?

Die Frage, was Mathematik überhaupt ist, klingt naiv. Sie ist aber gar nicht so leicht zu beantworten und hat Philosophen seit Jahrhunderten beschäftigt. Immanuel Kant stellte sogar die Frage, wie die reine Mathematik möglich sei, ganz an den Anfang seiner *Kritik der reinen Vernunft*. Andere Wissenschaften sind klar nach den Objekten gekennzeichnet, die sie studieren: Himmelskörper, Lebewesen, menschliche Beziehungen oder was auch immer. Bei der Mathematik ist das nicht so einfach.

Erstens sind die Gegenstände der Mathematik nicht immer die gleichen: Zahlen, algebraische Formeln, analytische Funktionen und geometrische Gebilde gehören natürlich dazu, aber das eigentliche mathematische Denken besteht eher im Studium von Strukturen überhaupt als im Studium der Struktur von bestimmten, vorher festgelegten Objekten. Aber das Problem geht noch tiefer: Im Gegensatz zu anderen Disziplinen ist hier nicht einmal klar, wo die Objekte existieren, die wir studieren. Sind sie intern oder extern? Subjektiv oder objektiv? Existieren sie nur in unseren Gehirnen oder in der reellen Welt? Besteht die Tätigkeit des Mathematikers darin, Neues zu *erfinden* oder zu *entdecken*? >



Für *Entdecken* spricht, dass sich mathematische Ergebnisse objektiv nachprüfen lassen: Der Beweis, den ein Mathematiker von einem Satz gibt, wird – wenn ihm kein Fehler unterlaufen ist – jeden Mathematiker von der Wahrheit der Behauptung überzeugen. Verschiedene Mathematiker, die dieselbe Frage untersuchen, werden stets dieselbe Antwort erhalten, unabhängig von ihrer Persönlichkeit oder ihrem individuellen Ge-

Zu jedem Zeitpunkt gibt es eine Vielzahl von gültigen Konsequenzen

schmack. Dasselbe gilt auch für verschiedene Kulturen, die häufig unabhängig voneinander auf genau dieselbe Mathematik gestoßen sind. So wurden etwa die Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen, der Satz von Pythagoras (der natürlich nicht überall so hieß!) oder der Algorithmus zum Ziehen von Kubikwurzeln in vielen verschiedenen Kulturen der Antike entdeckt.

Aber genauso häufig sind Mathematiker auch *Erfinder*. Zum einen hat der Mathematiker oft das rein subjektive Gefühl, etwas Eigenes zu kreieren. Zum anderen kommen verschiedene Mathematiker je nach persönlichem Geschmack und Erfahrung häufig auf verschiedene Problemstellungen und damit auf verschiedene Resultate. An ihren mathematischen Sätzen kann man sie oft wiedererkennen wie an einer persönlichen Handschrift. Genauso kommt es vor, dass verschiedene Kulturen ganz unterschiedliche mathematische Richtungen eingeschlagen und damit eine ihnen eigene Mathematik entwickelt haben.

Die Griechen etwa haben den Begriff des Beweises erfunden und in den Vordergrund gestellt, während die Chinesen zwar häufig dieselben Entdeckungen machten, diese aber in Form von Algorithmen oder Rechenrezepten präsentierten. Oder, um noch ein Beispiel zu nennen: Die Ägypter haben im Dienst von Wirtschaft, Landvermessung und Astronomie

genauso wie andere antike Völker das Rechnen mit rationalen Zahlen (Bruchzahlen) entwickelt, aber auf ganz eigenartige Weise: Anstatt die Brüche als Quotienten von Zähler und Nenner zu schreiben, haben sie nur reine Reziprozahlen ($1/n$) zugelassen und jeden Bruch als eine Summe von solchen dargestellt. Darüber hinaus wurden nur verschiedene Nenner zugelassen: $2/5$ wurde nicht als $1/5$ plus $1/5$ dargestellt, sondern als $1/3$ plus $1/15$!

Wo liegt dann die Wahrheit? Nach dem Gefühl der meisten Mathematiker in einer Kombination beider Aspekte. Zu jedem Zeitpunkt und bei jeder Fragestellung gibt es eine Vielfalt von gültigen Konsequenzen, die aus den Axiomen und dem bereits Bekannten folgen, ähnlich den vielen möglichen Zügen, die es bei jeder Position in einer Schachpartie gibt. Diese Konsequenzen sind in einem gewissen Sinne bereits da. Der Mathematiker muss aber jeweils entscheiden, welche Richtung er verfolgt, und dadurch kommen sein individuelles Können, sein Geschmack und seine Persönlichkeit zur Geltung. Der französische Mathematiker Gustave Choquet hat es so formuliert: „Der Satz, den man sucht, existiert für alle Ewigkeiten. Aber um ihn zu entdecken, muss man einen Weg erfinden.“

Gehört die Mathematik zur Kunst oder zur Wissenschaft? Wieder kann man beide Standpunkte leicht verteidigen. Für die Kunst spricht zunächst die Tatsache, dass die Mathematik häufig in der Kunst (im gewöhnlichen Sinne) vorkommt: Man braucht in der Architektur nur an die Pyramiden, das Parthenon oder die Gebäude von Christopher Wren, Le Corbusier oder vielen anderen Architekten zu denken. In der Musik an die Werke von Bach, Mozart oder Schönberg. Und in der Malerei an die von Dürer oder da Vinci.

Auch die Mathematik selbst kann ästhetisch schön sein – etwa manche Formen in der Geometrie, wie die fünf regelmäßigen Polyeder, die bereits Plato entdeckt hat. Oder, um ein moderneres Beispiel zu nennen, die schönen fraktalen Bilder, die vielen bekannt sind. Manchmal führt die Kunst sogar zu neuer Mathematik. Das ist unter anderem der Fall bei vielen Bildern des niederländischen Malers Maurits Escher. Ein noch interessanteres Beispiel wird durch die sogenannten Tesselierungen (Parkettierungen)



der Ebene gegeben. Ein ziemlich tief liegender mathematischer Satz besagt, dass es genau 17 wesentlich verschiedene Arten von Symmetrie gibt, die eine solche Tessellierung haben kann; und erstaunlicherweise wurden alle 17 von islamischen Künstlern im Mittelalter entdeckt und in wunderschönen Ornamenten der Alhambra in Granada realisiert.

Aber wenn ich von Kunst und Mathematik spreche, meine ich nicht diese Beziehungen zwischen der Mathematik und den anderen Künsten, so vielfach und interessant sie auch sein mögen, sondern, dass die Mathematik selbst Kunst ist. Dabei sind die relevanten ästhetischen Kriterien nicht von visueller, sondern von abstrakter Natur: etwa die Kürze, Schlichtheit, Klarheit und absolute Überzeugungskraft der Argumentationen und Ideen. Diese Kriterien mögen zunächst eher intellektuell als künstlerisch erscheinen. Dennoch gibt es kaum jemanden, der sich länger mit Mathematik beschäftigt und nicht ein Gefühl von ihrer Schönheit entwickelt hat.

Die Mathematiker benutzen Wörter wie *schön* und *elegant* sogar häufiger als wissenschaftliche Begriffe wie *überzeugend* oder *korrekt*. Und, was noch interessanter ist: Dieses Gefühl für mathematische Schönheit stellt sich sehr häufig als der sicherste Führer bei der Wahl des besten Weges durch das Labyrinth der Mathematik heraus, als eine Art Ariadnefaden.

Der Künstler darf seine Entscheidung – Was schreibe ich? Was male ich? Was komponiere ich? – nach ästhetischen Kriterien treffen. Der Wissenschaftler hat diesen Luxus fast nie, da die Natur nicht unbedingt den Weg eingeschlagen hat, der uns Menschen am besten gefällt. Bei der Mathematik ist die Situation intermediär: Der Mathematiker muss nicht unbedingt (und kann bestimmt nicht immer) nach ästhetischen Kriterien vorgehen; aber in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle stellt sich der mathematisch richtige Weg als der ästhetisch beste heraus. Es gibt keine bessere Strategie, als immer nach der *schönsten* Lösung zu suchen.

Die Mathematik kann also durchaus zur Kunst gerechnet werden. Aber auch für die Mathematik als Wissenschaft sprechen gute Argumente. Die Mathematik hat einen in den sonstigen Wissenschaften kaum anzutreffenden Grad von Objektivität: Ihre Ergebnisse sind absolut gesichert, da man sie ja

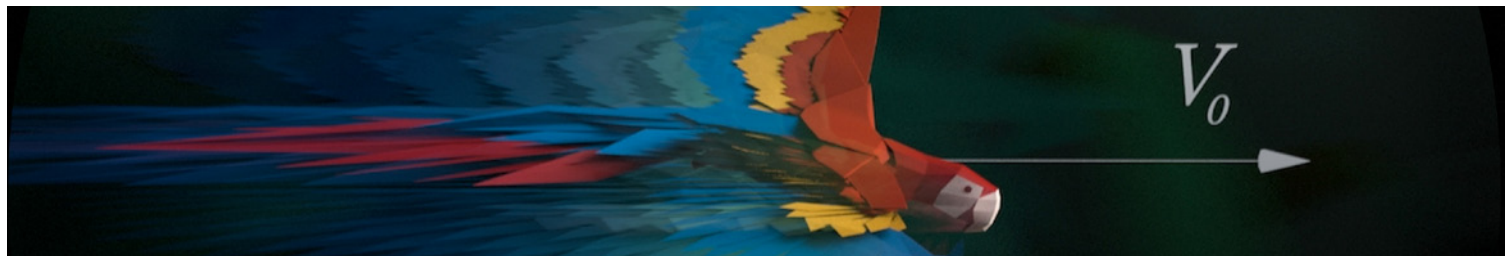
beweist. Und was einmal gefunden ist, veraltet nie. Spätere Entwicklungen werden zwar neue Aspekte hinzufügen, aber eine einmal entdeckte Wahrheit nie ändern.

Die Mathematik kann sogar als wissenschaftlicher als die anderen Wissenschaften gesehen werden, da sie noch weniger als diese von den Zufälligkeiten unserer Welt abhängt. So könnte man die verschiedenen Wissenschaften von *soft science* nach *hard science* anordnen, etwa: Geschichte – Soziologie – Psychologie – Medizin – Biologie – Chemie – Physik und dann erst Mathematik. Denn die Geschichte eines Landes wird von zufälligen Ereignissen bestimmt und hätte genauso gut anders verlaufen können; die Soziologie eines Volkes hängt stark von kulturellen Aspekten ab; die Psychologie ist universeller, aber immer noch kulturbedingt; die Medizin ist für sämtliche Kulturen und Völker gültig, aber nur

Die Natur hat nicht unbedingt den Weg eingeschlagen, der uns Menschen am besten gefällt

für die Gattung Mensch; die Biologie gilt für alle bekannten Lebensformen, würde aber vermutlich auf einem entfernten Planeten anders aussehen; die Chemie würde sogar in entfernten Planeten unverändert gelten, aber unter Konditionen extremer Temperatur oder extremen Druckes – wie etwa nach dem Urknall – anderen Gesetzen folgen.

Und sogar die Physik, die universell zu sein scheint, ist es nicht unbedingt, da wir uns leicht ein anderes Universum vorstellen könnten, in dem etwa das Verhältnis zwischen der Masse eines Protons und eines Elektrons einen anderen Wert als 1837 besitzt. Die Mathematik aber würde sogar in diesem anderen Universum gelten: Zwei plus zwei wäre immer noch vier, jede Zahl immer noch ein Produkt von Primzahlen. Es ist paradox: Die Mathematik, die scheinbar unwirklichste aller Wissenschaften, beschreibt die reellste Realität! >



Warum nun bereitet die Mathematik vielen Menschen so viel Freude? Die naheliegende und gewiss nicht total falsche Antwort lautet: Es macht einfach Spaß, Probleme zu lösen und schwierige Rätsel zu knacken. Dazu kommt das bereits beschriebene ästhetische Gefühl, die Freude an der Eleganz und Schönheit der Ergebnisse und der Argumente, die

Wir schaffen es, eine Lösung für alle Zeiten unwiderlegbar zu beweisen

man bei anderen liest oder selber findet. Die Hauptquelle der Befriedigung aber, die die Mathematik ihren Anhängern zu geben vermag, scheint mir das besondere Gefühl, ohne externe Hilfsmittel ein Stück Wahrheit zu entdecken, hinter ein Geheimnis der Natur zu kommen. Als einfaches Beispiel dafür möchte ich Euklids berühmten Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen anbringen:

Man stelle sich vor, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, etwa 2, 3, 5, 7 und so weiter bis 31 und dann keine mehr. Dann könnte man diese Primzahlen 2, 3, . . . , 31 alle zusammen multiplizieren und zu dem Produkt 1 addieren. Die dabei entstehende Zahl wäre durch keine der Primzahlen 2, 3, . . . , 31 teilbar, da sie um eins größer als ein Vielfaches von jeder von ihnen ist. Sie müsste aber, wie jede Zahl, entweder selber prim sein oder einen kleineren Primfaktor enthalten. Dieser Faktor wäre, entgegen der Annahme, eine Primzahl, die nicht in unserer ursprünglichen Liste vorhanden war.

Ob man dieses Argument bei einer so kurzen Darstellung in allen Details nachvollziehen kann oder nicht, auf jeden Fall kann man – so glaube ich – eine wahrlich fantastische Eigenschaft dieser Argumentation erkennen: Von einer Frage ausgehend (Gibt es endlich oder unendlich viele Primzahlen?), die wir Menschen eigentlich gar nicht lösen können sollten, da wir ja nie mehr als einen kleinen endlichen Anteil der Primzahlen betrachten können, schaffen wir es dennoch mithilfe von ein paar einfachen,

wenn auch sehr subtilen Sätzen, die Lösung zu finden und für alle Zeiten unwiderlegbar zu beweisen.

Die Mathematik, die von innen kommt und gleichzeitig etwas Externes beschreibt, ist die einzige Wissenschaft, mit der man die Wahrheit nicht nur durch pures Nachdenken finden, sondern sogar auch beweisen kann! Und dies tun zu können, ist eben ein herrliches Gefühl.

Die Mathematik kann einigen Menschen eine tiefe Freude schenken. Aber eben leider nur einigen. Sie ist längst nicht jedermanns Sache. Im Gegensatz zur Musik oder zur guten Küche, die einige leidenschaftlich und andere distanzierter lieben, aber doch fast alle schätzen, weckt die Mathematik enorm unterschiedliche Gefühle: Die, die ihre Faszination einmal entdeckt haben, können gar nicht davon ablassen, während die große Mehrheit der Menschen sich nicht vorstellen kann, dass Mathematik und Freude überhaupt etwas miteinander zu tun haben. Auf die Frage, woran das liegt, möchte ich nicht eingehen, obwohl es durchaus interessante Untersuchungen hierzu gibt. (Sicher ist auf jeden Fall, dass ein großer Anteil davon kulturell bedingt ist.) Ich bin aber überzeugt, dass die Liebe zur Mathematik in vielen Menschen potenziell vorhanden ist.

Das Hauptproblem besteht vielleicht darin, dass die meisten Menschen nie echte Mathematik gesehen haben: Die Mathematik, die jeder in der Schule lernt, wird beinahe immer als bloße Rezeptsammlung zur Anwendung im Alltagsleben oder bestenfalls in der Wissenschaft präsentiert. Schöne Mathematik kommt selten vor. Aber um die Schönheit der Mathematik zu verstehen, muss man ihr auch begegnet sein.

Stellen Sie sich vor, Sie würden von der Existenz der Musik wissen, hätten aber nie einen Ton oder eine Melodie gehört. Sie hätten bestimmt ebenso große Mühe, von ihrer Schönheit überzeugt zu sein, wie das jetzt bei vielen Menschen für die Mathematik gilt. Es wäre natürlich noch besser, wenn Sie nicht nur einige Töne und Melodien gehört, sondern diese auch selber gespielt oder gesungen hätten. Und noch besser, wenn Sie dies bereits als Kind getan hätten! Genauso verhält es sich mit der Mathematik.

Zum Glück sind Begegnungen mit der Mathematik durchaus möglich. Es gibt viele mathematische Resultate, deren Formulierungen (und manchmal

auch Beweise) für Nichtmathematiker zugänglich sind und deren Schönheit bestimmt viele nachempfinden können. Beispiele sind die bereits erwähnten Platonischen Körper, die Eulersche Formel oder der Satz von Lagrange, wonach jede natürliche Zahl die Summe von höchstens vier Quadratzahlen ist. Es gibt auch andere, mit denen man selber experimentieren und somit Freude am mathematischen Entdecken erleben kann.

Ich erinnere mich gut daran, wie ich mit zwölf Jahren von einem Chemiker den Satz von Pick erzählt bekam, wonach der Flächeninhalt von einem Polygon auf Karopapier, dessen Eckpunkte nur in Kreuzpunkten liegen, eins weniger ist als die Anzahl der inneren Punkte plus die halbe Anzahl der Randpunkte. Ich habe wochenlang darüber nachgegrübelt, bis ich endlich einen Beweis dafür fand. Oder das mysteriö-

Der Satz von Pick regte zum wochenlangen Grübeln an

se Möbiusband mit nur einer Seite und nur einem Rand: Versuchen Sie, durch reines Nachdenken herauszukriegen, was passiert, wenn Sie mit einer Schere ein solches Band in der Mitte, beziehungsweise ein Drittel vom Rand entfernt, aufschneiden!

Solche Begegnungen, die für Jung und Alt absolut faszinierend sein können, lassen sich durch einen guten Lehrer oder auch durch ein gutes Buch vermitteln. Ich denke zum Beispiel an die zwei Bücher *Der Zahlenteufel* und *Zugbrücke außer Betrieb* von Hans Magnus Enzensberger, wovon sich das erste eher an Kinder, das zweite an Erwachsene richtet. Aber es gibt neben Lehrern und Lehrbüchern auch einen dritten Weg: ein Museum für die Mathematik, in dem man Schönes sehen, hören und berühren kann. Ein Beispiel ist derzeit die Ausstellung der Pariser Fondation Cartier „Mathematics – A Beautiful Elsewhere“. Bis 18. März helfen hier acht Künstler, die Ästhetik der Mathematik zu erleben. Zu einem Ausflug in die Schönheit des abstrakten Denkens lade ich Sie herzlich ein. ◀



DER AUTOR

Don Zagier, Jahrgang 1951, ist seit 1995 Direktor am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn und seit 2000 Professor am Collège de France in Paris. Der vorliegende Aufsatz des international bekannten Zahlentheoretikers basiert auf einer Rede, die er 2003 anlässlich der Eröffnung des math.space im Wiener MuseumsQuartier gehalten hat, und auf der englischen/ französischen Version, die im Katalog der Ausstellung „Mathematics – A Beautiful Elsewhere“ publiziert wurde.

Weitere Informationen zu dieser interaktiven Show, an der Don Zagier maßgeblich beteiligt war, finden Sie unter www.fondation.cartier.com