Große Probleme

Abschreckend ist die Mathematik für die allermeisten. Dabei geht es um einige der spannendsten Fragen, die sich der menschliche Verstand stellen und – im Erfolgsfall – auch logisch zwingend aufklären kann.

SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

Gerd Faltings, Direktor am Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn

der Mathematik

SERIE

»Das würde ich schon gerne beweisen«

Biegt man in der Bonner Innenstadt gleich hinter dem Münsterplatz in die kleine Vivatsgasse ein, fällt der Blick auf die Ruine des alten Sterntors. Links davon, neben einem Modegeschäft, findet sich der unscheinbare Eingang zum Max-Planck-Institut für Mathematik. Im zweiten Stock dann die Überraschung: Offenbar haben kreative Architekten in die oberen Geschosse des Altbaus ein modernes Institut vom Feinsten eingebaut. Gerd Faltings empfängt mich gut gelaunt in seinem geräumigen Arbeitszimmer. Auf seinem Besuchertisch türmen sich Manuskripte, lächelnd zeigt mir Faltings eine Zusendung über Primzahlen, betitelt »In the Name of God«. Nicht nur Redaktionen bekommen solche Schreiben. Von seinen Fenstern hat der Direktor am Max-Planck-Institut für Mathematik einen hübschen Blick auf das bunte Treiben auf dem Münsterplatz. Ob ihn dieser Blick nicht allzu sehr ablenke? Nein, eigentlich kaum.

Spektrum: Herr Professor Faltings, vor 25 Jahren – Sie waren gerade 28 – haben Sie die mordellsche Vermutung bewiesen. Die war damals zweifellos ein großes Problem und ihre Lösung ein großer Erfolg (siehe Info S. 82).
Gerd Faltings: Ja, dieses Problem hatte mich damals angezogen, weil es wichtig war und ich Methoden gelernt hatte, wie man das angehen kann.
Spektrum: Mordells Vermutung war schon über 60 Jahre bekannt. Was hat Sie veranlasst, sich auf solch ein Hochrisikoprojekt einzulassen?
Faltings: Ich war schon habilitiert, da kann man etwas riskieren. Und ich hatte den französischen Mathematiker Lucien Spiro kennen gelernt, der hatte dazu neue Ideen. Die haben wohl nicht alle ernst genommen. Ich fand das aber interessant und erwartete eigentlich nicht, dass man damit den Mordell lösen kann. Doch ich sagte mir: Man kann's ja mal probieren. Es kam damals die so genannte

INFO

Rationale und irrationale Zahlen

Rational sind Zahlen, die als Verhältnis zweier ganzer Zahlen p und q dargestellt werden können, haben also die Form p/q. Reelle Zahlen erweitern die rationalen Zahlen um die irrationalen Zahlen (wie die Kreiszahl π) und lassen sich stets als unendliche oder abbrechende Dezimalzahlen darstellen.


AUFNAHME AUS DEM JAHR 1863; PUBLIC DOMAIN

B. Riemann (1826–1866)


UNIVERSITÄT GÖTTINGEN; PUBLIC DOMAIN

David Hilbert (1862–1943)


LONDON MATHEMATICAL SOCIETY

Louis Mordell (1888–1972)

Arakelovtheorie auf. Mir war klar, dass zwar noch etwas fehlte, doch es klappte dann überraschend gut.

Spektrum: Wie lange haben Sie an dem Beweis gesessen?

Faltings: Etwa zwei Jahre, mit Unterbrechungen. Es war nun nicht so, dass mit so einem Beweis die halbe Mathematik umgekrempelt würde, aber es war schon eine Herausforderung – vielleicht wie der berühmte Mount Everest.

Spektrum: War Ihr Beweis nützlich für weitere Arbeiten?

Faltings: Ja, ich konnte damit die allgemeine Theorie weiterentwickeln.

Spektrum: Durch diese Arbeit sind Sie plötzlich zu einem Medienstar geworden.

Faltings: Es war im Sommer 1983 – und da herrschte wohl gerade Saure-Gurken-Zeit, auch so etwas spielt eine Rolle. Ein Jahr später gab es noch mehr Aufregung, als ich dann nach Princeton ging und ein Kollege das der Presse steckte.

Spektrum: Hat Ihnen die Medienaufmerksamkeit gefallen?

Faltings: Eigentlich nicht. Es ist ja auch schwierig zu erklären, was ich mache. Einiges geht zwar schon, aber das allermeiste ist sehr weit weg vom Alltag.

Spektrum: Könnten Sie uns für Mordell eine Kostprobe geben?

Faltings: Sicher. Es geht darum, dass gewisse Gleichungssysteme nur endlich viele Lösungen in den rationalen Zahlen haben (siehe Info S. 84). Das Standardbeispiel ist die Fermat-Gleichung $x^n + y^n = z^n$. Mein Beweis dafür besagt: Diese Gleichung hat höchstens endlich viele teilerfremde Lösungen, wenn n mindestens gleich 4 ist. Natürlich ist das heute überholt, da Andrew Wiles 1994 gezeigt hat, dass die Gleichung für n größer als 2 überhaupt keine Lösungen hat.

Mein Satz bleibt aber für andere Gleichungen interessant, beispielsweise für $x^n + y^n = 2z^n$. Dafür gibt es für alle n eine Lösung, nämlich wenn $x = y = z = 1$, und hier funktioniert die Methode von Wiles nicht. Aber mein Beweis liefert dann immerhin noch die Aussage, dass die Gleichung höchstens endlich viele Lösungen hat. Das heißt, mein Satz gilt allgemeiner für mehr und verschiedenartigere Gleichungen, sagt aber in Spezialfällen wie Fermat, wenn man es genauer wissen will, nicht so viel aus.

Spektrum: Was sind in der Mathematik große Probleme?

Faltings: Große Probleme sind Vermutungen, von denen man annimmt, dass sie zutreffen, die man jedoch nicht hat lösen können – und die interessant sind.

Spektrum: Allein dass eine Vermutung lange nicht bewiesen ist, macht sie nicht unbedingt bedeutend.

Faltings: Nein, aber es gibt ihr, wie bei Fermat, ein gewisses Flair. Manche finden nur historische Fragen interessant. Ich selbst bin eigentlich kein Liebhaber von Antiquitäten. Wenn ein Problem interessant ist, dann ist es mir egal, ob es 10 oder 100 Jahre alt ist.

Spektrum: Und was heißt interessant?

Faltings: Das Problem sollte nicht so schwer sein, dass man gar nichts machen, und nicht so leicht, dass man es sofort erledigen kann – also kommt es auf die richtige Schwierigkeit an.

Spektrum: Ist für Sie die Goldbach-Vermutung, »jede gerade positive Zahl größer als 2 ist gleich der Summe von zwei Primzahlen« (siehe Info S. 84), ein großes Problem?

Faltings: Goldbach finde ich eigentlich nicht so spannend. Es gibt ja den Einwand: Primzahlen soll man multiplizieren und nicht addieren. Aber das ist ein ästhetischer Vorbehalt. Goldbach ist sicher ein wichtiges Problem, und wenn ich es lösen könnte, würde ich es auch lösen.

Spektrum: Manche der großen Probleme sind selbst für Laien leicht verständlich, vor allem in der Zahlentheorie, und diese wirken dadurch stark in die Öffentlichkeit. Das zieht oft Amateure an …

Faltings: … fürwahr …

Spektrum: … und andere Probleme wirken nur in der Fachwelt, weil sie außerhalb unver-

INFO

Mordell-Vermutung Satz von Faltings

Für Kurven vom Geschlecht g größer 1 gibt es nur endlich viele rationale Punkte auf der Kurve. Das Geschlecht bezeichnet in etwa die Zahl der Henkel an einem geometrischen Objekt. Vermutet hat dies im Jahr 1922 Louis Mordell, bewiesen wurde es 1983 von Gerd Faltings.

Transzendenz

Eine reelle Zahl x heißt transzendent, wenn sie nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung beliebigen (endlichen) Grades $a_n x^n + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ für $n \geq 1$ mit ganzzahligen oder allgemein rationalen Koeffizienten a_k auftreten kann. Jede transzendente Zahl ist auch irrational.

Primzahlzwillinge

Primahlen sind natürliche Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Davon gibt es, wie schon Euklid bewies, unendlich viele. Sind zwei Primzahlen benachbart mit dem Abstand 2, dann spricht man von einem Primzahlzwilling. Beispiele: 3 und 5 oder 11 und 13. Ob es auch unendlich viele dieser Zwillingspaare gibt, ist ungeklärt.

ständlich sind. Macht das für Sie einen Unterschied?
Faltings: Meistens interessieren mich die fachlichen Probleme mehr, weil ich sie verstehe und sie nicht so speziell sind wie viele der populären. Auch sind von diesen die meisten schon gelöst.
Spektrum: ... aber nicht Goldbach oder etwa die Vermutung, dass es unendliche viele Primzahlzwillinge gibt (siehe Info links; SdW 2/1996, S. 26).
Faltings: Gut. Die Primzahlzwillinge sind auch eine wichtige Frage, aber daran habe ich nicht gearbeitet.
Spektrum: Lassen Sie uns über einige große Probleme sprechen, die bereits gelöst wurden. Was ist mit der Aussage über Primzahlen von Terence Tao: »Es gibt endliche, aber beliebig lange arithmetische Folgen von Primzahlen, also mit konstantem Abstand der Primzahlen voneinander (siehe SdW 4/2005, S. 114)«? Dafür hat Tao 2006 unter anderem die Fields-Medaille erhalten.
Faltings: Das betrifft die statistische Verteilung von Primzahlen, schon sehr raffiniert. Mich hat dieses Gebiet nie besonders angesprochen, ich vermisse die große Idee dahinter. Man sollte Gebiete aber nicht nach irgendeiner Wertigkeit anordnen, auch mein Interesse kann sich in den nächsten Jahren ändern.
Spektrum: Im Jahr 1900 hat David Hilbert 23 Probleme vorgestellt, von denen die meisten heute gelöst sind. Im Jahr 2000 hat die amerikanische Clay Foundation etwas Ähnliches versucht und neue Probleme aufgeführt, für deren Lösung je eine Million Dollar Preisgeld winken. Was halten Sie von der Clay-Liste, die auch in unserer Spektrum-Serie eine Rolle spielt?
Faltings: Ich würde zustimmen, dass dies alles bedeutende, anerkannte Probleme sind. Das Preisgeld ist eigentlich Werbung für Öffentlichkeit. Wenn ich etwa die riemannsche Vermutung lösen könnte (siehe den Folgebeitrag), dann wäre mir das Preisgeld aber egal. Eine Million Dollar haben viele, aber so etwas lösen, das können nur ganz wenige. Die Clay Foundation unterstützt jedoch viel mathematische Forschung, darum sehe ich ihnen diese Art der Werbung gerne nach.
Spektrum: Ein anderes gelöstes Problem: das Vierfarbenproblem (siehe Info rechts), also die 1852 erstmals gestellte Frage: Reichen vier Farben immer aus, um eine beliebige Landkarte in der Ebene so einzufärben, dass keine zwei angrenzenden Länder die gleiche Farbe bekommen? Bewiesen wurde das 1977, zuletzt mit Hilfe eines Computers (siehe SdW-Erstausgabe Oktober 1978, S. 82).
Faltings: Ja, um diese Computerhilfe gab es Debatten. Mathematisch war das vielleicht nicht ein ganz großes Problem, aber sicher eine wichtige Frage in diesem Gebiet. Es war übrigens Heinrich Heesch, der in jahrelanger Vorarbeit die Strategie entwarf, mit der man später den Beweis per Computer finden konnte. Damit reduzierten sich die problematischen Fälle auf endlich viele, die dann wieder vom Rechner überprüft werden konnten.
Spektrum: Was halten Sie von Computern bei mathematischen Beweisen, für Puristen gilt das ja noch immer als Tabu?
Faltings: Für mich ist das kein Tabu. Wenn Sie einen Beweis von 10 000 Seiten geschickt bekommen, der nur von Menschenhand stammt – darin können genauso viele Fehler verborgen sein wie in einem Computerprogramm.
Spektrum: Kommen wir zur fermatschen Vermutung, heute auch Satz von Fermat-Wiles genannt (siehe Info S. 84). Sie hatten doch auch damit zu tun.
Faltings: Für die Öffentlichkeit war Fermat zweifellos das größte Rätsel der Mathematik. Aber auch innermathematisch war der Beweis fruchtbar, denn es wurde ja, übrigens von dem deutschen Mathematiker Gerhard Frey und dann von dem Amerikaner Ken Ribet, eine überraschende Querbeziehung von Fermat zu den so genannten elliptischen Kurven hergestellt. Mit diesen Ideen konnte Wiles arbeiten, und er hat es dann überraschend, mit gewissen Startschwierigkeiten, nach etwa sieben Jahren in völliger Geheimhaltung hingekriegt (siehe SdW 8/1993, S. 14).
Spektrum: Wussten denn auch Sie nicht, woran Wiles damals arbeitete?
Faltings: Nein.
Spektrum: Es gab in dem Beweis zunächst einen Fehler.
Faltings: Ja, den hatten die Gutachter bei der Fachzeitschrift »Inventiones mathematicae« im Sommer 1993 entdeckt. Zuerst blieb das geheim, bis es nach einigem Rumoren im Herbst 1993 zum öffentlichen Eingeständnis dieses Fehlers kam. Zusammen mit seinem Studenten Richard Taylor konnte Wiles ihn dann im Oktober 1994 beheben. Auch das kam, nach der ursprünglichen Sensation, für alle überraschend, weil solche Sachen meistens nicht funktionieren.
Spektrum: Sie hatten doch damit zu tun.
Faltings: Ja, im Oktober 1994 hat Andrew Wiles den korrigierten Beweis an mich geschickt mit der Bitte, ihn durchzusehen. Ich fand dann den Beweis in Ordnung. Eigentlich sollte er noch anderen gezeigt werden, aber das Ergebnis ging dann direkt so an die Öffentlichkeit.

INFO

Vierfarbensatz

Der Vierfarbensatz (früher auch als Vierfarbenvermutung oder Vierfarbenproblem bekannt) besagt, dass vier Farben immer ausreichen, um eine beliebige Landkarte in der euklidischen Ebene so einzufärben, dass keine zwei angrenzenden Länder die gleiche Farbe bekommen. Heinrich Heesch entwickelte in den 1960er und 1970er Jahren Verfahren, um einen Beweis mit Hilfe des Computers zu suchen. Darauf aufbauend konnten Kenneth Appel und Wolfgang Haken 1977 einen solchen finden. Der Beweis reduzierte die Anzahl der problematischen Fälle von unendlich auf 1936 (eine spätere Version sogar auf 1476), die durch einen Computer einzeln geprüft wurden. Der Vierfarbensatz war das erste große mathematische Problem, das mit Hilfe von Computern gelöst wurde.


P. de Fermat (1607 – 1665)

ZEITGENÖSSISCHER STICH; PUBLIC DOMAIN

INFO

Fermat-Vermutung Satz von Wiles

Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ besitzt für ganzzahlige und natürliche Zahlen $n > 2$ keine Lösung. Dies wurde 1994, nach Vorarbeiten von Gerhard Frey und Ken Ribet, von Andrew Wiles bewiesen.

goldbachsche Vermutung

Im Jahr 1742 von Christian Goldbach ursprünglich in einer schwächeren Form aufgestellt, wird sie heute so formuliert: Jede gerade Zahl größer als 2 kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.

Spektrum: War das nicht mehr Arbeit als für ein übliches Gutachten?

Faltings: Durch Wiles' erste Ankündigung hatte ich mich damit schon beschäftigt und deshalb für eine Sommerakademie der Studienstiftung 1993 das Thema »elliptische Kurven« gewählt. Der Beweis kam dann zwar wie gesagt nicht, aber daher war ich trotzdem schon eingearbeitet.

Spektrum: Wie prüft man so einen Beweis?

Faltings: Wenn man einmal die Idee hat, dann überlegt man selbst, ob sie auch tragfähig ist.

Spektrum: Kommen wir zur Poincaré-Vermutung, ebenfalls bis vor Kurzem eines der großen Probleme der Clay Foundation, beziehungsweise zum Beweis des russischen Mathematikers Grigori Perelman (siehe Info S. 81; SdW 9/2004, S. 86). Der Beweis wurde etwas unorthodox nur über das Internet kommuniziert, ohne wie eigentlich üblich nach Begutachtung in einem Fachjournal.

Faltings: Ja, aber Perelman war schon ein seriöser Fachmann, und so haben die Kollegen viele Details nachgearbeitet und verifiziert. Wie ich hörte, hat Perelman dabei nicht sonderlich mitgeholfen. Aber es ist ja durchaus üblich, dass Preprints ausgetauscht werden, etwa über das Archiv der Cornell University, heute online. Das war auch schon bei meinem Mordell-Beweis so. So spricht sich das herum, mehrere haben dann in Seminaren die Details durchgerechnet. Als diese Prüfung sich hinzog, wurde ich schon langsam skeptisch. Aber dann haben alle verkündet, dass Perelmans Beweis korrekt ist. Inzwischen gibt es Bücher darüber.

Spektrum: Thema Keplers Vermutung – das Orangenkistenproblem: Was ist die dichteste Packung von Kugeln? Auch für diesen umfangreichen Beweis von 1998 durch den Amerikaner Thomas Hales wurden Computer eingesetzt (siehe SdW 4/1999, S. 10). Wie sehen Sie das?

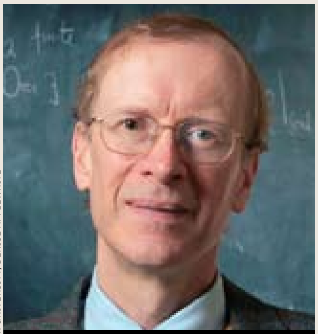
Faltings: Auch das wurde, wie schon beim Vierfarbentheorem, wieder von manchen moniert. Das Problem ist, ob man ein Computerprogramm reproduzieren kann. Das ist sehr schwierig, weil jeder Computer schon wieder anders ist. Aber ich bin nicht gegen Computerhilfe. Wie gesagt, auch wenn man von Hand rechnet, kann man genauso Fehler machen wie mit einem Computer. Ich finde es nur unbefriedigend, wenn man das Problem in den Rechner eingibt, und nach drei Tagen kommt dann heraus: Ja oder Nein. Daraus lernt man wenig. Es gab sogar mal den Fall, dass ein Intel-Chip falsch addiert hat. Soll man sich nun als Gutachter auch noch von Intel die Chipunterlagen schicken lassen?

Generell gesagt: Bis jetzt gehört noch dazu, dass man dem Computer vorschreibt, was er zu machen hat, also bleibt da doch viel Menschliches. Aber Thomas Hales überlegt sich ja jetzt, wie man den Computer auch die Strategie erarbeiten lassen kann (siehe SdW 9/2003, S. 13). Das wäre schon etwas anderes.

Spektrum: Ein gelöstes großes Problem dreht sich in der Mathematik um die so genannten endlichen einfachen Gruppen und ihre Klassifikation. Diese Gruppen spielen in der Theorie vielleicht eine ähnliche Rolle wie die Primzahlen unter den ganzen Zahlen (siehe SdW 5/2008, S. 88). Wie es heißt, haben zwischen 1920 und 1980 etwa 100 Mathematiker in mehreren hundert Publikationen an die 15000 Seiten mit Beweisen vieler Einzelaspekte gefüllt. Wie kann man da noch sicher sein, dass alles stimmt?

Faltings: Daniel Gorenstein und Michael Aschbacher haben ab 1980 an einer Vereinfachung dieses Beweisgebirges gearbeitet. In einem 800-Seiten-Buch von Gorenstein blieb dann jahrelang eine Lücke offen, über die man nicht so gerne sprach. Erst vor wenigen Jahren gelang es dann Aschbacher und Kollegen, diese Lücke zu schließen – auch noch mal auf vielen Seiten.

Spektrum: Nochmals gefragt: Wenn Beweise diese Umfänge annehmen und von Kollektiven erarbeitet werden – wie kann man das alles glauben?


PRINCETON UNIVERSITY, DENISE APPLEWHITE
Andrew Wiles (*1953)


UNIVERSITY OF PITTSBURGH
Thomas Hales (*1958)


INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS
Grigori Perelman (*1966)

Faltings: Ich habe diesen Beweis selbst nicht gelesen oder versucht, ihn zu verifizieren. Er wird sich vielleicht noch vereinfachen lassen, jedoch nicht viel. Denn der Beweis kann nicht viel einfacher sein als das Ergebnis. Selbst wenn noch etwas falsch daran ist, heißt das nicht, dass der Fehler irreparabel sein muss.

Im Prinzip bin ich bereit, das Ergebnis zu glauben, einfach auch, weil sich viele Leute damit beschäftigt haben. Meine Erfahrung ist, wenn ein Fehler unentdeckt bleibt, dann deshalb, weil sich niemand dafür interessiert hat.

Spektrum: Sprechen wir noch über große ungelöste Probleme der Mathematik: die riemannsche Vermutung – seit über 150 Jahre unbewiesen (siehe nächsten Artikel). Warum ist sie so wichtig?

Faltings: In der riemannschen Vermutung stecken sozusagen alle Primzahlen. Sie liefert eine explizite Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer vorgegebenen Schranke. Es ist wirklich ein wichtiges Problem, derzeit wohl die Vermutung mit dem höchsten Prestige.

Spektrum: Auch hier hat man per Computer numerisch ihre Richtigkeit geprüft, soweit ich weiß bis 10^{18}.

Faltings: Das beweist natürlich nichts, auch wenn es die These schon sehr plausibel macht. Riemann hat es ja nicht wirklich vermutet, er hat eigentlich nur gefragt, ob es so sei.

Spektrum: Gibt es für Sie andere große Probleme, die nicht auf der Clay-Liste stehen?

Faltings: Es gibt das so genannte Langlands-Programm oder die Langlands-Vermutung, benannt nach Robert P. Langlands in Princeton (siehe SdW 10/2002, S. 98). Es geht, fachlich gesprochen, um Zusammenhänge zwischen der Galoistheorie, über die ich auch selbst forsche, und automorphen Formen. Daran arbeiten derzeit viele Leute.

Spektrum: Das sollten wir hier dann wohl nicht weiter vertiefen. Aber wie steht es mit der Zahlentheorie à la Goldbach-Vermutung?

Faltings: Da gibt es die so genannte abc-Vermutung, aufgestellt im Jahr 1985. Die halte ich auch für bedeutend (siehe Info rechts). Dabei geht es um die simple Gleichung $a + b = c$, und man will, dass in dem Produkt $a \cdot b \cdot c$ möglichst wenige verschiedene Primzahlen auftauchen. Vermutet wird, dass das nicht zu wenige sein können, aber gibt es für die Größe der Lösung eine obere Schranke in Form einer Zahl? Das ist die Herausforderung!

Spektrum: Wieso ist das wichtig?

Faltings: Einmal würde sich damit der Wiles-Beweis der Fermat-Vermutung dramatisch vereinfachen. Zum anderen hätte man dann ein Kriterium für die Effektivität des Lösungsverfahrens. Das heißt, dass man nicht nur die Anzahl, sondern auch die Größe der Lösungen beschränken kann. So ließe sich auch meinen Mordell-Beweis verbessern, indem man eine echte obere Schranke für die endlich vielen rationalen Punkte fände und nicht nur allgemein weiß, dass eine solche existieren muss.

Spektrum: Und arbeiten Sie an dieser Verbesserung?

Faltings: Wenn ich wüsste, wie ich da weiterkäme, würde ich das gerne machen. Aber so kann ich mich ja nicht einfach davorsetzen und tagein, tagaus darüber nachdenken.

Spektrum: Meine Schlussfrage betrifft die generelle Entscheidbarkeit von mathematischen Aussagen. Seit Gödels Unvollständigkeitssatz weiß man ja, dass es Behauptungen gibt, die weder beweisbar noch widerlegbar sind.

Faltings: Es ist eine Sache, ob man allgemein zeigt, wie Gödel das getan hat, dass es nicht beweisbare oder nicht widerlegbare Behauptungen gibt. Oder ob man für ein konkretes Problem nachweisen will, dass es weder beweisbar noch widerlegbar ist. Dafür gibt es auch Beispiele.

Spektrum: Bei den großen Problemen könnte doch manch eines von der nicht entscheidbaren Art sein, oder?

Faltings: Das vermuten manche Leute gern, aber ich halte das ein bisschen für Defätismus. Man will sich damit vielleicht entschuldigen, dass man etwas nicht lösen kann.

Spektrum: ... dass die Trauben zu sauer sind. Aber wenn man genau dies zeigen könnte, wäre das doch auch ein Gewinn?

Faltings: Das wäre dann auch eine Art Lösung des Problems. Aber die riemannsche Vermutung ließe sich im Prinzip durch ein Gegenbeispiel widerlegen, das sich auch numerisch finden ließe. Ich sehe keinen Grund, warum nicht auch andere große Probleme nicht entscheidbar sein sollten.

Spektrum: Welche Probleme würden Sie in der Zukunft gerne gelöst sehen?

Faltings: Wie gesagt: Bei Langlands und dem abc-Problem wäre eine Klärung schön. Doch Vorsicht: Schon manches große Problem war am Ende dann doch kleiner als gedacht. Es gibt ja das berühmte Beispiel von Hilbert, der verglich in den 1920er Jahren drei Probleme miteinander: die Tranzendenz von $2^{\sqrt{2}}$, Fermat und Riemann, und meinte, die Tranzendenz von $2^{\sqrt{2}}$ sei viel schwerer als die riemannsche Vermutung. Das erste dieser drei Rätsel wurde wenige Jahre später erledigt, Fermat ist inzwischen auch bewiesen, nur Riemann ist noch offen. So gesehen müsste ich würfeln.

Spektrum: Professor Faltings, vielen Dank für das Gespräch. ◁

INFO

Poincaré-Vermutung Satz von Perelman

Sie besagt fachlich: »Jede einfach zusammenhängende kompakte unberandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.« Dies behauptete Henri Poincaré 1904, bewiesen wurde es von Grigori Perelman im Jahr 2002.

abc-Vermutung

Sie wurde 1985 von Joseph Oesterle und David Masser aufgestellt. Dabei geht es um eine Eigenschaft von Tripeln (Dreiergruppen) von natürlichen Zahlen, bei denen die dritte die Summe der beiden anderen ist: $a + b = c$. Es sind bereits eine Anzahl weit reichender zahlentheoretischer Aussagen bekannt, die aus der Gültigkeit der abc-Vermutung folgen.

Die Fragen stellte **Reinhard Breuer**, Chefredakteur von »Spektrum der Wissenschaft«.

Singh, S.: Fermats letzter Satz – Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. dtv, München 2000.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/962054.